Рощева Т.А., Митюшов Е.А., Берестова С.А.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ КИНЕМАТИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

teormech@mmf.ustu.ru
ГОУ ВПО "УГТУ-УПИ имени первого Президента России Б.Н.Ельцина"
г. Екатеринбург

Возможности современных информационных технологий обязывают расширить применение аналитических методов к решению задач механики.

В работе рассматриваются аналитические методы решения задач кинематики плоских механизмов, сферического и свободного движений твердого тела, основанные на некоторых нетрадиционных следствиях теорем Эйлера и Ривальса.

Possibilities of modern information technologies oblige to expand application of analytical methods to the decision of problems of mechanics.

In work analytical methods of the decision of problems of kinematics of flat mechanisms, spherical and free movements of the firm body, based on some nonconventional consequences of theorems of Euler and Rivals are considered.

Изменение целей, методов, а также содержания любой учебной дисциплина – это естественный и закономерный процесс. Последним, наиболее существенным, реформированием в преподавании теоретической механики был переход к инвариантной (векторной) форме записи основных ее теоретических положений. Это позволило значительно сократить объем курса, добавив, во многих случаях, наглядность и физическую ясность излагаемому материалу. Средствами кинематического анализа механических систем при этом оставались преимущественно геометрические методы. Возможности современных информационных технологий обязывают, на наш взгляд, расширить применение аналитических методов к решению задач теоретической механики. Это позволит более эффективно использовать то небольшое количество часов, которое отводится на изучение курса, а также получать современные, адаптированные к возможностям имеющихся графических пакетов, математические модели механического движения.

В настоящей работе рассматриваются аналитические методы решения задач кинематики плоских механизмов, сферического и свободного движений твердого тела, основанные на некоторых нетрадиционных следствиях теорем Эйлера и Ривальса.

Как правило, при математическом моделировании процессов, связанных с изменением положения твердого тела в пространстве, использование законов классической механики основано на векторном представлении определяющих параметров движения (таких, например, как угловая скорость или угловое ускорение), а известные матричные записи

$$\Omega=\begin{pmatrix}0 & -\omega_z & \omega_y\\ \omega_z & 0 & -\omega_x\\ -\omega_y & \omega_x & 0\end{pmatrix};\ \dot{\Omega}=\begin{pmatrix}0 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y\\ \varepsilon_z & 0 & -\varepsilon_x\\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 0\end{pmatrix}.$$

остаются предметом лишь теоретических исследований. Использование матричных методов, когда основные соотношения между кинематическими соотношениями представлены в виде матричных уравнений, позволило, во-первых, получить удобные для практического использования формулы определения ускорений при произвольном движении твердого тела, и во-вторых, дополнить теоретические основы кинематики твердого тела новыми следствиями, облегчающими процесс исследования движения и обеспечивающими возможность построения алгоритмов этого исследования.

Как известно, связь между скоростями и ускорениями двух точек твердого тела устанавливается формулами Эйлера и Ривальса

$$\vec{v}_B=\vec{v}_A+\vec{\omega}\times AB$$
$$\vec{a}_B=\vec{a}_A+\vec{\varepsilon}\times\overrightarrow{AB}+\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\overrightarrow{AB}\right) \tag{1}$$

При матричной реализации операций над векторами эти соотношения принимают вид [1]

$$\hat{v}_B=\hat{v}_A+\Omega\widehat{AB},\ \hat{a}_B=\ \hat{a}_A+(\dot{\Omega}+\Omega^2)(\widehat{AB}). \tag{2}$$

где $\hat{v}_A$, $\hat{v}_B$ $\hat{a}_A$, $\hat{a}_B$ – вектор-столбцы скоростей и ускорений соответствующих точек.

Умножим обе части равенства (2) слева на вектор-строку $\widehat{AB}^T$

$$\widehat{AB}^T\hat{a}_M=\ \widehat{AB}^T\hat{a}_A+\widehat{AB}^T\ (\dot{\Omega}+\Omega^2)\widehat{AB}$$

Учитывая, что

$$\widehat{AB}^T\ \varepsilon\ \widehat{AB}=0\ ;\ \widehat{AB}^T\ \Omega=(\hat{v}_A-\hat{v}_B)^T;\ \Omega\widehat{AB}=\hat{v}_B-\hat{v}_A,$$

после некоторых преобразований получим

$$\widehat{AB}^T\ (\hat{a}_A-\hat{a}_B)=(\hat{v}_A-\hat{v}_B)^T\ (\hat{v}_A-\hat{v}_B)\,. \tag{3}$$

В векторной записи формула (3) имеет вид

$$(\vec{a}_A-\vec{a}_B)\cdot AB=(\vec{v}_A-\vec{v}_B)^2. \tag{4}$$

Это соотношение может быть успешно использовано при решении многих задач кинематики твердого тела наряду со следствием о проекциях скоростей двух точек твердого тела на ось, проходящую через эти точки.

При сферическом движении уравнение (4) записывается следующим образом

$$\vec{a}_B\cdot\vec{r}_B=-v_B^2\,.$$

Еще одно полезное (по крайней мере, для исследования движения плоских механизмов) следствие может быть получено из уравнения (2) умножением обеих частей слева на $(\hat{v}_B - \hat{v}_A)^T = (\Omega \widehat{AB})^T$.

$$(\hat{v}_B - \hat{v}_A)^T\,(\hat{a}_B - \hat{a}_A) = (\Omega \widehat{AB})^T\,(\dot{\Omega} + \Omega^2)(\widehat{AB}).$$

Откуда

$$(\hat{v}_B - \hat{v}_A)^T\,(\hat{a}_B - \hat{a}_A) = \widehat{AB}^T \Omega^T\,\dot{\Omega}\,\widehat{AB} \text{ или}$$

$$\frac{1}{AB^2}\,(\hat{v}_B - \hat{v}_A)^T\,(\hat{a}_B - \hat{a}_A) = \hat{l}^{\,T} \Omega^T\,\dot{\Omega}\,\hat{l}\,, \qquad (5)$$

где $\hat{l}$ – «орт» прямой, проходящей через точки A и B, $\hat{l} = \frac{\widehat{AB}}{|AB|}$.

В векторных обозначениях формула (5) принимает вид

$$\frac{(\vec{v}_A - \vec{v}_B)\cdot(\vec{a}_A - \vec{a}_B)}{AB^2} = \vec{\varepsilon}\cdot\vec{\omega} - np_{\vec{AB}}\vec{\varepsilon}\;\; np_{\vec{AB}}\vec{\omega}.$$

А расчет плоских механизмов можно проводить с использованием очевидного следствия:

$$\frac{(\vec{v}_A - \vec{v}_B)\cdot(\vec{a}_A - \vec{a}_B)}{AB^2} = \varepsilon_z \omega_z\,,$$

в случае, если движение происходит в плоскости Oxy.

Другие важные соотношения кинематики точки и твердого тела также легко получаются с использованием матричных алгоритмов записи кинематических соотношений (кинематические уравнения Эйлера и теорема Кориолиса об определении ускорения точки при сложном движении). Опыт применения предложенных алгоритмов при работе с группой студентов строительного факультета продемонстрировал, что они не вызывают трудностей (студенты увереннее манипулируют с матрицами, чем с геометрическими векторами).

В заключение отметим, что изложение многих вопросов динамики также существенно упрощается с использованием рассмотренных представлений.